D'après le tableau des variations de f, on a : 0 est un maximum absolu de f donc $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \sin x \leq x$.

• Montrons que $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.

Soit $g(x) = \sin x + \frac{x^3}{6} - 1$

g' est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g''(x) = x - \sin x \geq 0$ (car $\sin x \leq x$).

x	0	$+\infty$
$g''(x)$	+	
$g'(x)$	0 ↗	
$g(x)$	0 ↗	

D'après le tableau des variations de g, on a : $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g'(x) \geq 0$ et par suite

$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

• Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^{0} k^3 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$

• Supposons que pour un entier n donné, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$